

Tractrix

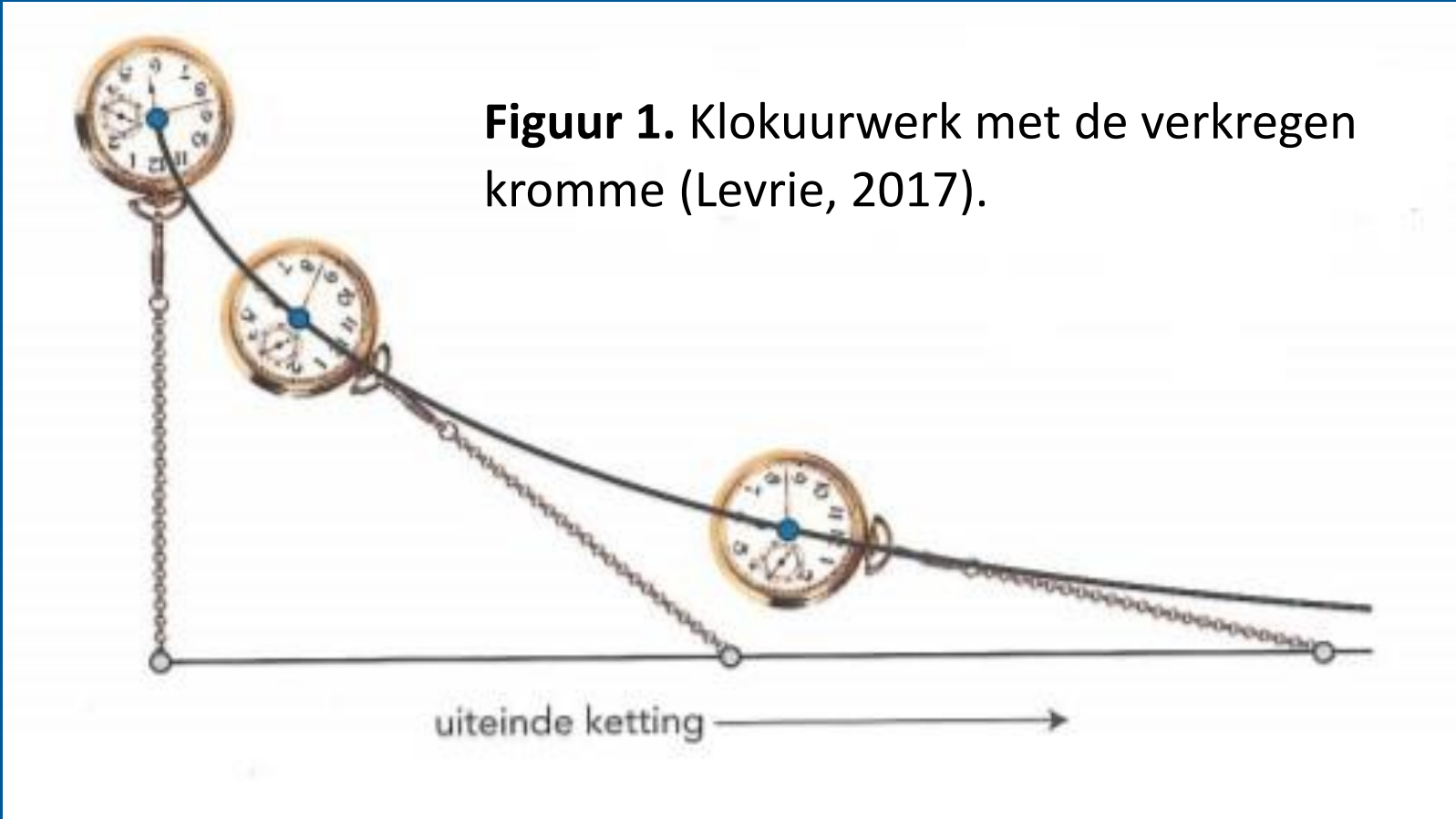
Van het latijnse woord “trahere” wat trekken betekent

Introductie

In 1670 werd door Claude Perrault een zakuurwerk op een tafel gelegd, deze werd zo neergelegd dat het zakuurwerk op de korte kant op de rand van de tafel werd gelegd en het uiteinde van de ketting liep langs diezelfde rand naar de lange zijde van de tafel. Het uiteinde van de ketting werd over de lange zijde van de tafel getrokken, met de vraag “wat is de vorm van de kromme van het getrokken uurwerk”? (Levrie, 2017). (figuur 1).

De differentiaalvergelijking die bij deze kromme hoort is: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$

In onze poster vind je de uitwerking van de differentiaalvergelijking met de bijbehorende experimenten en resultaten, maar ook nemen wij jullie mee in de geschiedenis van de Tractrix.



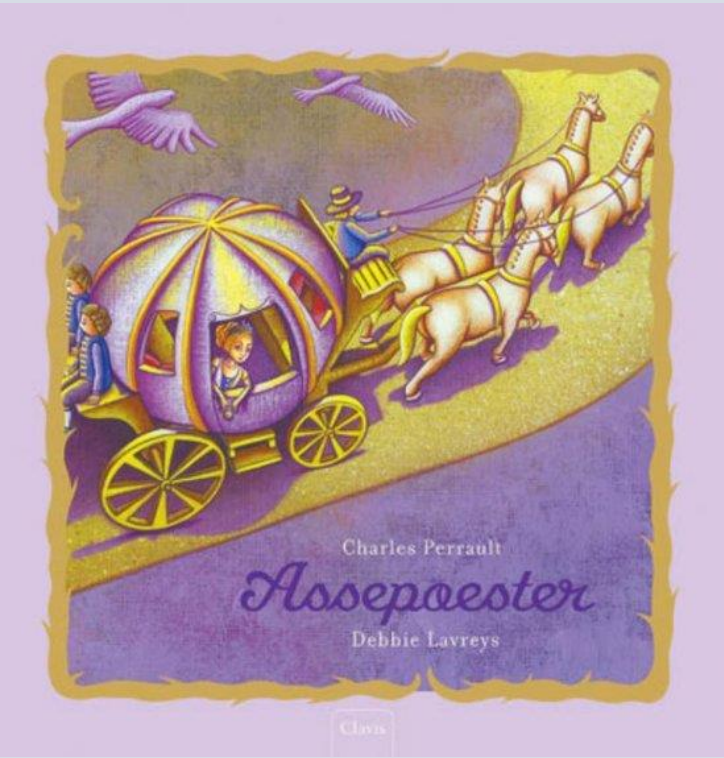
Geschiedenis

Rond 1670 werd door Claude Perrault, het broertje van de meer bekende Charles Perrault die wij kennen van het schrijven van de sprookjes, zoals “De schonhe slaapster”, “Assenpoester” (figuur 2) en “Klein duimpje”. Claude Perrault zelf was een architect en werkte samen met verschillende architecten aan de oostgevel van het Louvre (Levrig, 2017). De wiskunde wereld werd verrast door Perrault die tijdens een bijeenkomst van de Franse academie van de wetenschap de vraag stelde: wat is de vorm kromme van het getrokken uurwerk? In deze periode was voornamelijk bekend dat Newton en Leibniz de differentiaal- en integraalrekening ontwikkelden. Uiteindelijk kwam Christiaan Huygens (figuur 3) in 1693 met een oplossing voor dit slepprobleem. Christiaan Huygens introduceerde de naam van de curve en noemde deze “traectoria”, wat later tractrix werd genoemd. Tractrix komt van het latijnse trahere, wat ook wel trekken betekend (Levrig, 2017).

Christiaan Huygens stelde de vergelijking $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ op en

nam voor a de lengte l . Hieruit volgt: $dx = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} dy$

Vervolgens door integreren levert: $x = a \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \right) - \sqrt{a^2 - y^2}$



Figuur 2. Verhaal
“assenpoester” van Charles
Perrault.



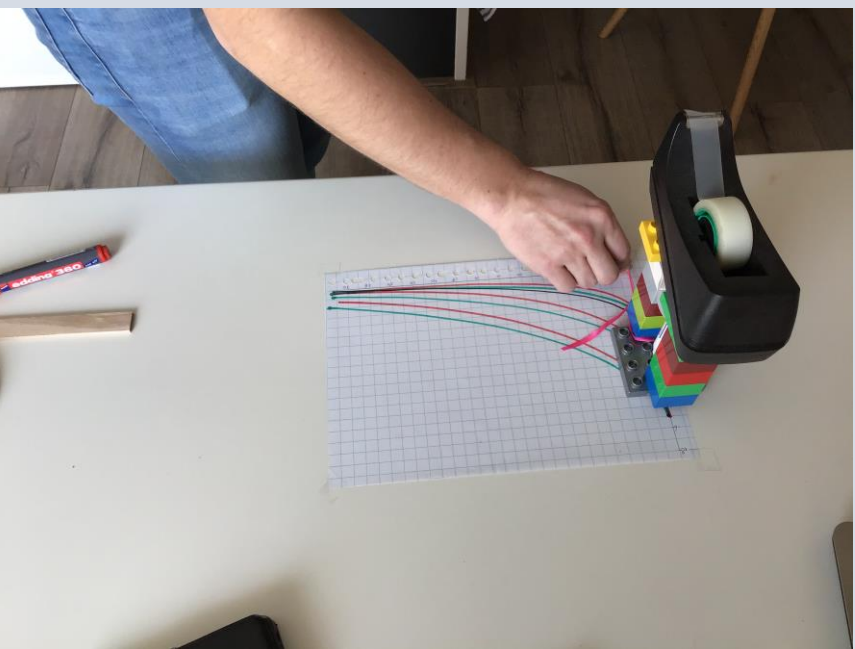
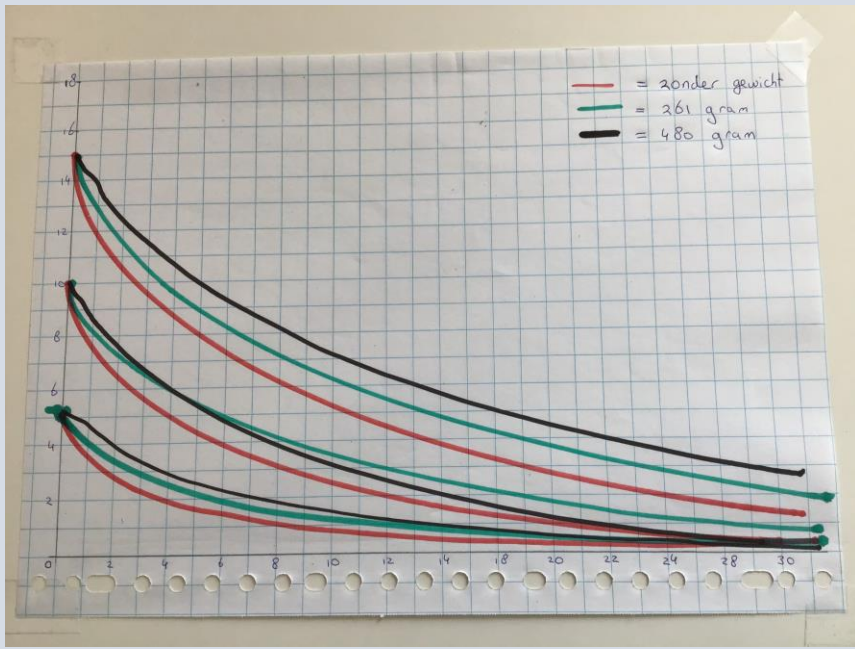
Figuur 3. Christiaan Huygens.

Experiment & Resultaten

We hebben experimenten buiten en binnen uitgevoerd. Buiten hebben we een planten trolley aan een touw gebonden, met verschillende lengtes, en over de y-as getrokken. Binnen hebben we van blokjes een stellage gemaakt waar stiften in konden en deze stelling konden we verzwaarden met een gewicht.

De berekeningen die we uit onze formule haalde kwamen redelijk overeen met de waardes die we buiten en binnen hadden gemeten. We hebben drie verschillende lengtes touwtjes genomen en deze drie keer over een papier getrokken met verschillende gewichten. De stellage hebben we verzwaard met twee gewichten, een telefoon van 261 gram en een tapehouder van 480 gram. Het verschil tussen onze berekening en de uitkomsten op de tekening komt, denken wij, omdat er andere materialen en wrijvingskrachten zijn tussen ons experiment en de experimenten van Huygens.

Link naar filmpje experiment: <https://youtu.be/TSrOqCOOzZc> https://youtu.be/1Q_JVL7Fy_M



Resultaten

Experiment binnen

Lengte van 5 cm touw

(2,4)

$$y = 5 \ln(5 + \sqrt{5^2 - 2^2}) - 5 \ln(2) - \sqrt{5^2 - 2^2} \approx 3,251$$

Lengte van 10 cm touw

(5,4

$$y = 10 \ln(10 + \sqrt{10^2 - 5^2}) - 10 \ln(5) - \sqrt{10^2 - 5^2} \approx 4,509$$

Lengte van 15 cm touw

(8,5)

$$y = 15 \ln(15 + \sqrt{15^2 - 8^2}) - 15 \ln(8) - \sqrt{15^2 - 8^2} \approx 5,935$$

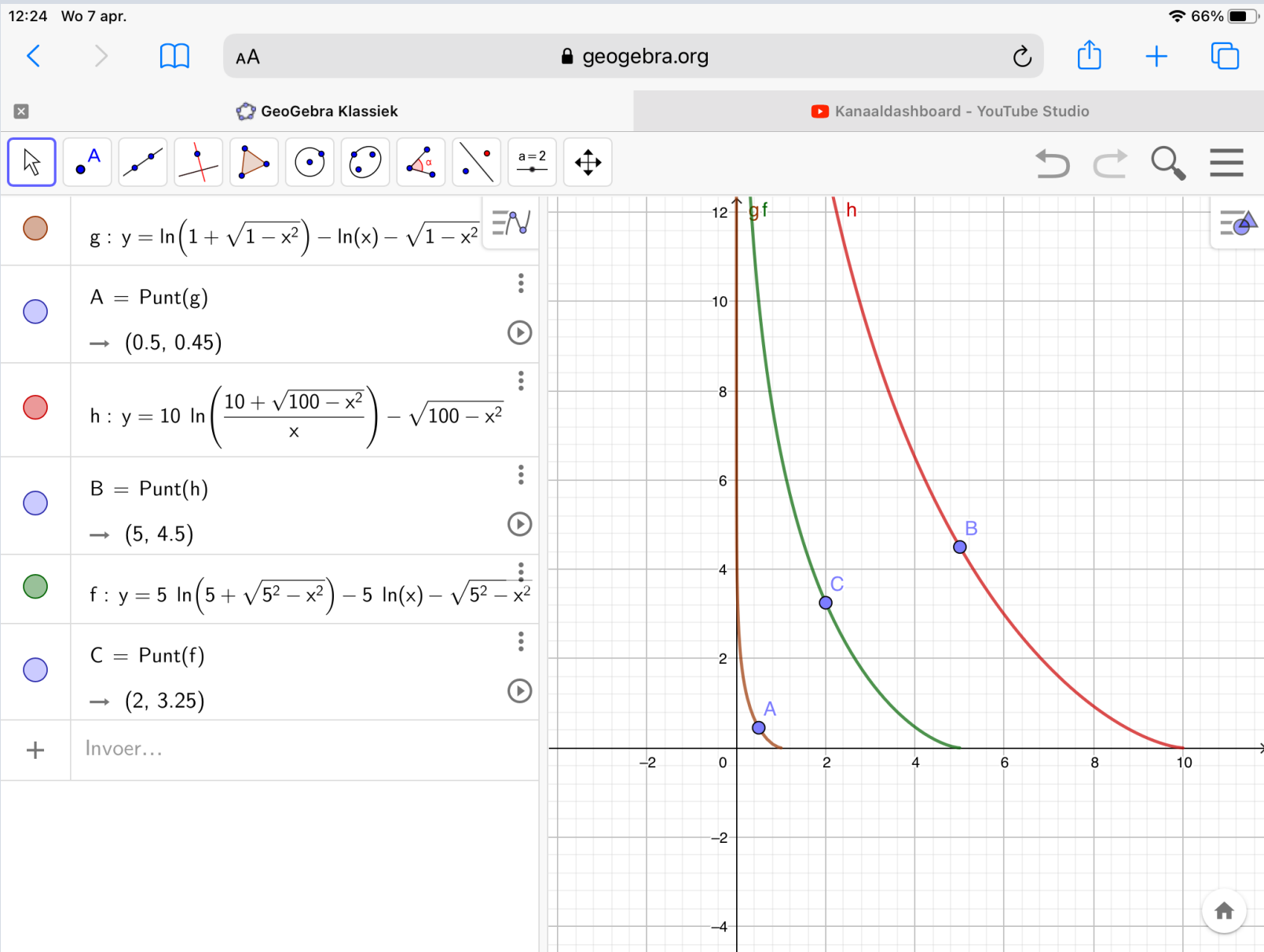
Experiment buiten

Lengte touw 1 meter

(0,5; 0,39)

$$y = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1^2 - 0,5^2}}{0,5}\right) - \sqrt{1^2 - 0,5^2} \approx 0,451$$

$$y = \ln(1 + \sqrt{1 - 0,5^2}) - \ln(0,5) - \sqrt{1 - 0,5^2} \approx 0,451$$



Conclusie

Aan de hand van de experimenten zagen we elke keer wel een overeenkomst tussen de sleepkromme. De lengte van het touwtje veranderen gaf een soortgelijke kromme die een gelijke vorm vertoonde, maar over een ander pad liep. Ons model in geogebra kwam overeen met de kromme die we op papier met de stelling hadden gemaakt. Na berekening kwamen de coördinaten van ons experiment aardig in de buurt van onze berekeningen. Gewicht op de stelling leggen had invloed op de sleepkromme. In de tekening en filmpjes lijken de verschillen niet zo groot maar als de gewichten zwaarder worden en de lengtes groter dan krijg je, ons inziens, weldegelijk een groot verschil. Het uitrekenen in de formule wat voor invloed het gewicht had ging ons te ver om een goede conclusie hierover te trekken.

Bronvermelding

Bos, H.J.M., 1988. Vanuit herkenning en verbazing. *Euclides*, 63^e jaargang.

Groot, J., 2005. Huygens' tractrix: een klassiek sleepprobleem. *Nederlands tijdschrift voor natuurkunde*, jaargang 7, nummer 9.

Levrie, P., 2017. De tractrix, *Pythagoras*, april 2017

Math4all.nl/informatie/leibniz

Lavenda , B.H, 2012. A new perspective on relativity: an odyssey in non-euclidean geometries.

Oosterbeek, M., & Oosterbeek, M. (2017, 21 februari). *Natuurkundig gekibbel (1): Newton vs. Leibniz*. the Quantum Universe. <https://www.quantumuniverse.nl/natuurkundig-gekibbel-1-newton-vs-leibniz>

Nahin, P. J., 2007. *Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion*, New Jersey: Princeton University Press.